FACULTÉ DES SCIENCES JURIDIQUES, ÉCONOMIQUES ET SOCIALES AIN CHOCK
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Département des Sciences Economiques et Gestion

Filière : Sciences Economiques et Gestion

Semestre 2

Module: Mathématiques Financières

Pr. AIT CHEIKH

Année universitaire 2019 - 2020

Chapitre 3:

Les Annuités

- Section 1: Annuités constantes de fin de période
- Section 2: Annuités constantes de début de période

- Section 1: **Annuités constantes de fin de période**
- Section 2: Annuités constantes de début de période

Section 1: Les annuités constantes de fin de période

Principe de l'annuité

Aujourd'hui

Demain

Placement

Capital Initial

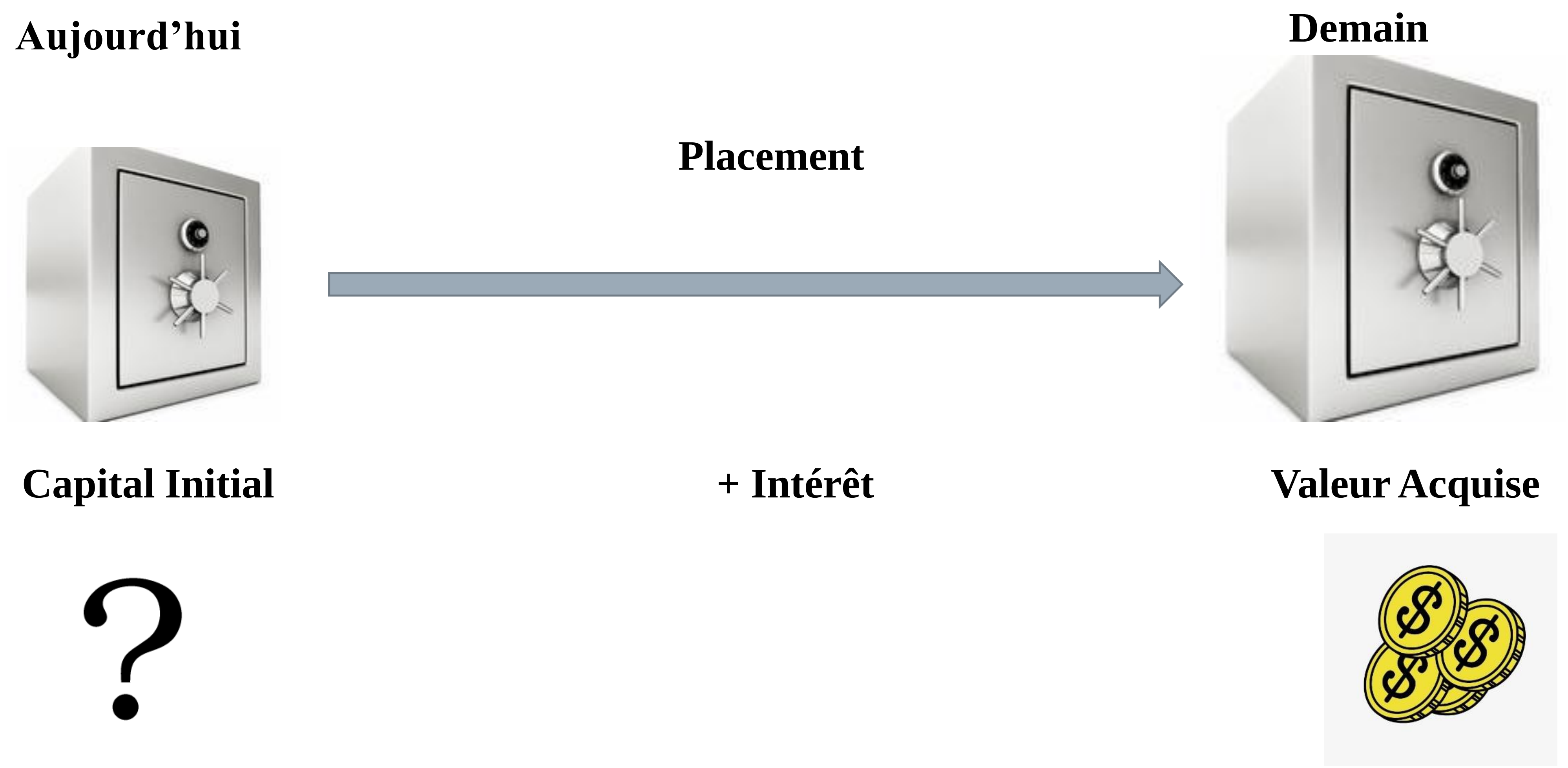
+ Intérêt

Valeur Acquise

?

Section 1: Les annuités constantes de fin de période

Principe de l'annuité



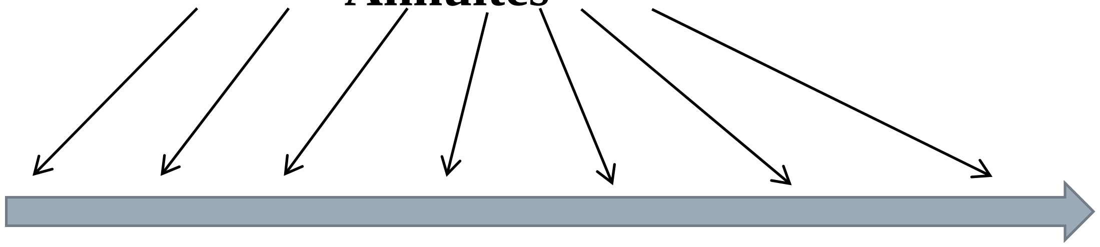
Section 1: Les annuités constantes de fin de période

Principe de l'annuité

Aujourd'hui

Annuités

Demain



Versements périodiques d'une somme d'argent

+ Intérêt

Capital Initial

Valeur Acquise

?

Caractéristiques des annuités :

1. Périodicité
2. Nombre de versement
3. Montant de chaque versement
4. Date de chaque versement

Section 1: Les annuités constantes de fin de période

Définition 1.1

1. Les annuités sont des versements périodiques de sommes d'argent pour :

- **Constituer une épargne** ou un capital (Exemple: Capital retraite) ;
- **Rembourser** un prêt ou amortir un investissement.

2. L'objectif de l'étude des annuités est de **déterminer:**

- La valeur acquise, à une date donnée, de l'ensemble des annuités;
- La valeur actuelle, à la date d'aujourd'hui, de l'ensemble d'une série d'annuités ;

3. Les annuités peuvent être **constantes ou variables:**

- **Les annuités** ***constantes*** sont des annuités dont la somme versée est constante.
- **Les annuités** ***variables*** sont des annuités dont le montant varie d'une période à l'autre.

Définition 1.1

4. Période:

La période retenue est l’année, mais on peut effectuer des versements semestriels, trimestriels ou mensuels ; on parle alors dans ce cas de semestrialités, trimestrialités ou mensualités.

Section 1: Les annuités constantes de Fin de période

1. la valeur Acquise

Formalisation

Principe d'une suite géométrique

C'est une suite avec 5 termes

$$\boldsymbol{S = a + a \times q + a \times q^2 + a \times q^3 + a \times q^4}$$

$$\boldsymbol{S = \ ?}$$

1. la valeur Acquise

Formalisation

Principe de la suite géométrique

C'est une suite avec 5 termes

(1) $$S = a + a \times q + a \times q^2 + a \times q^3 + a \times q^4$$

(2) $$S \times q = a \times q + a \times q^2 + a \times q^3 + a \times q^4 + a \times q^5$$

(2) – (1) $$S \times q - S = a \times q^5 - a$$

$$S \times (q - 1) = a \times (q^5 - 1)$$

$$S = a \times \frac{q^5 - 1}{q - 1} \text{ avec } q \neq 1$$

Généralisation pour n termes $$S = a \times \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ avec } q \neq 1$$

1. la valeur Acquise

Formalisation

Principe de la suite géométrique

C'est une suite avec 5 termes

$$S = a + a \times q + a \times q^2 + a \times q^3 + a \times q^4$$

Exemple

$$S = 10 + (10 \times 0,5) + (10 \times 0,5^2) + (10 \times 0,5^3) + (10 \times 0,5^4)$$

Application de la formule

$$S = a \times \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ avec } q \neq 1$$

$$\begin{cases} a = 10 \\ q = 0,5 \\ n = 5 \end{cases}$$

$$S = 10 \times \frac{0,5^5 - 1}{0,5 - 1} = 19,375$$

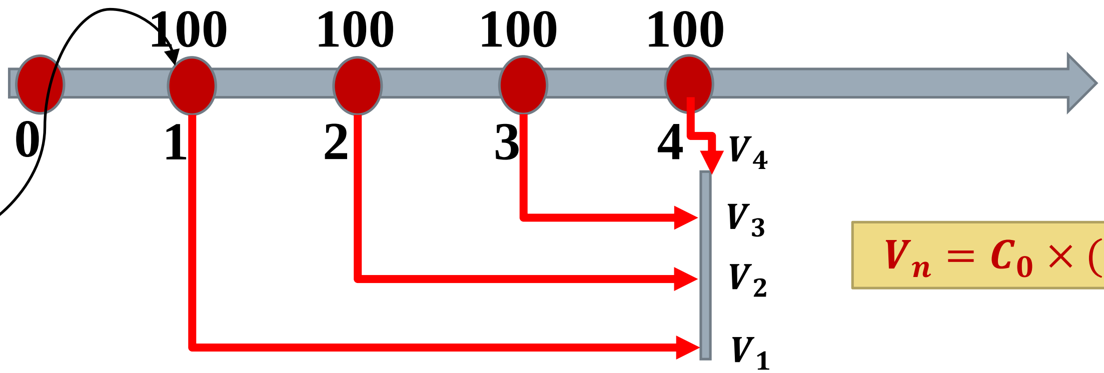
Section 1: Les annuités constantes de Fin de période

1. la valeur Acquise

Exemple

Calculer à 10% la valeur acquise par 4 annuités constantes de 100 dh après le dernier versement.

Le remboursement de la première Annuité s'effectue en fin de la première période



$V_n = ?$

$$V_n = C_0 \times (1+i)^n$$

$$V_4 = C_0 \times (1+i)^0$$

$$V_3 = C_0 \times (1+i)^1$$

$$V_2 = C_0 \times (1+i)^2$$

$$V_1 = C_0 \times (1+i)^3$$

$$V_n = V_4 + V_3 + V_2 + V_1$$

C'est une suite avec 4 termes

$$V_n = 100 + 100 \times 1,1 + 100 \times 1,1^2 + 100 \times 1,1^3$$

$$S = a \times \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ avec } q \neq 1$$

$$V_n = 100 \times \frac{1,1^4 - 1}{1,1 - 1} = 464,1$$

1. la valeur Acquise

Définition 1.2

La valeur acquise V_n d'une série d'annuités est la somme des valeurs acquises, à la fin de la dernière période, de toutes les annuités constituant cette série.

$$\boxed{V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}}$$

$$\boxed{V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Avec :

- V_n :la valeur acquise par la suite des annuités (la somme des valeurs acquises par chacun des versements).
- a : l'annuité constante de fin de période (Valeur ou montant de l'annuité).
- n: le nombre de périodes (d'annuités).
- i: le taux d'intérêt correspondant à la période retenue.

1. la valeur Acquise

Exemple

Calculer la valeur acquise, au moment du dernier versement, par une suite de 15 annuités de 35.000 DH chacune. Taux : 10% l'an.

$$\mathbf{V_{15} = 35.000 \times \frac{1{,}1^{15} - 1}{0{,}1} = 1.112.036{,}83\ dh}$$

1. la valeur Acquise

Exemple

Calculer la valeur acquise au moment du dernier versement par une suite de 10 annuités constantes de fin de période de 17.500 DH chacune. Taux : 8% l'an.

$$\mathbf{V_{10} = 17.500 \times \frac{1{,}08^{10} - 1}{0{,}08} = 253.514{,}84\ dh}$$

1. la valeur Acquise

Exemple

Combien faut-il verser à la fin de chaque semestre pendant 8 ans, pour constituer, au moment du dernier versement, un capital de 450.000 DH. Taux semestriel : 4,5%

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$a = \frac{V_n \times i}{(1+i)^n - 1}$$

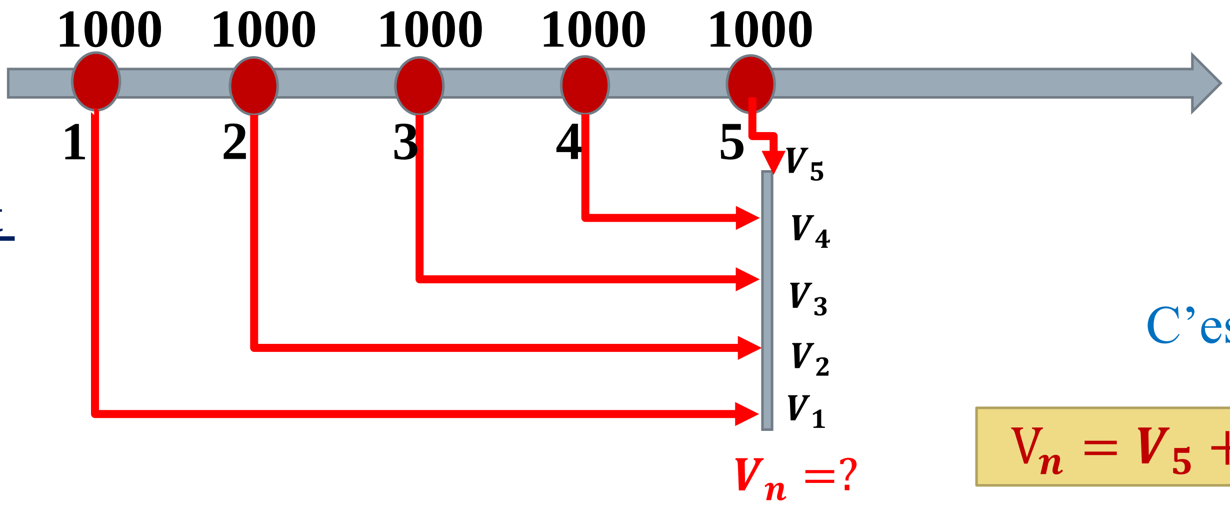
$$a = \frac{450.000 \times 0{,}045}{(1+0{,}045)^{16} - 1} = 19.806{,}9 \text{ dh}$$

1. la valeur Acquise

Exemple

Pendant 5 ans un individu effectue un placement de 1000 dh, la capitalisation est annuelle au taux de 6%. Calculer la valeur acquise immédiatement après le dernier versement, puis un *ans* après le dernier versement, puis après *3 ans*.

1. Immédiatement



C'est une suite avec 5 termes

$$V_n = V_5 + V_4 + V_3 + V_2 + V_1$$

$$V_n = 1000 + 1000 \times 1,06 + 1000 \times 1,06^2 + 1000 \times 1,06^3 + 1000 \times 1,06^4$$

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

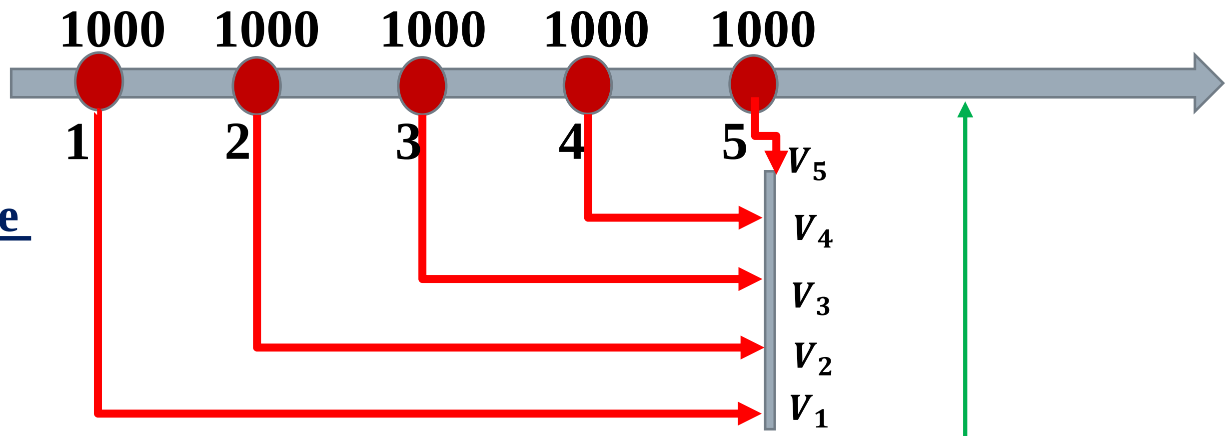
$$V_n = 1000 \times \frac{1,06^5 - 1}{0,06} = 5637,09$$

1. la valeur Acquise

Exemple

Pendant 5 ans un individu effectue un placement de 1000 dh, la capitalisation est annuelle au taux de 6%. Calculer la valeur acquise immédiatement après le dernier versement, puis un *ans* après le dernier versement, puis après *3 ans*.

2. Après une année



$V_n = C_0 \times (1+i)^n$

$V_n = ?$ $\quad V_{n+1} = ?$

$V_{n+1} = V_n \times (1+i)^{n'}$

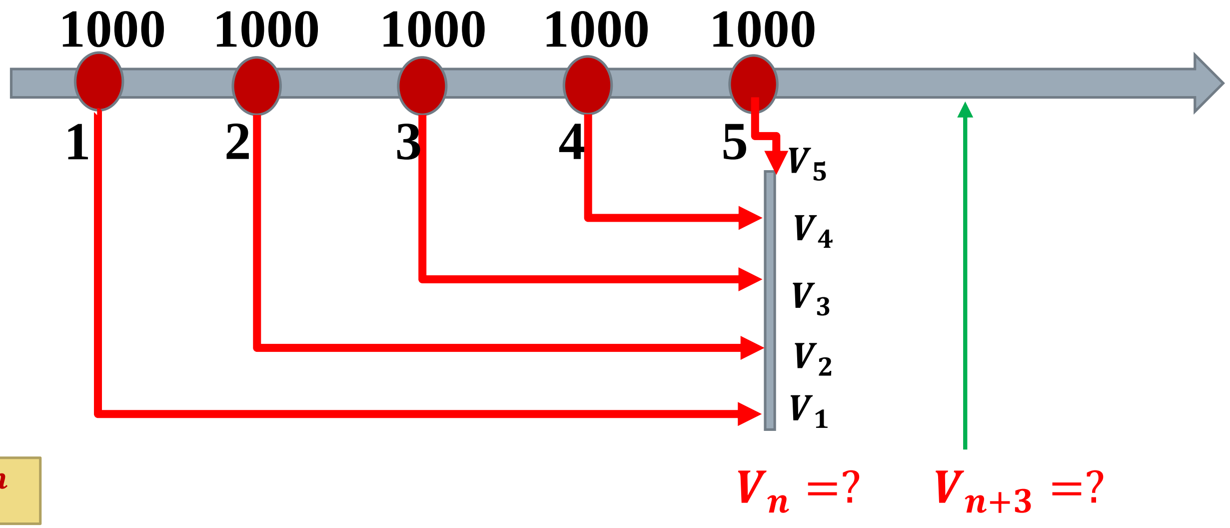
$V_{n+1} = 5637,09 \times (1,06)^1 = 5975,32$

1. la valeur Acquise

Exemple

Pendant 5 ans un individu effectue un placement de 1000 dh, la capitalisation est annuelle au taux de 6%. Calculer la valeur acquise immédiatement après le dernier versement, puis un *ans* après le dernier versement, puis après *3 ans*.

3. Après 3 ans



$$V_n = C_0 \times (1+i)^n$$

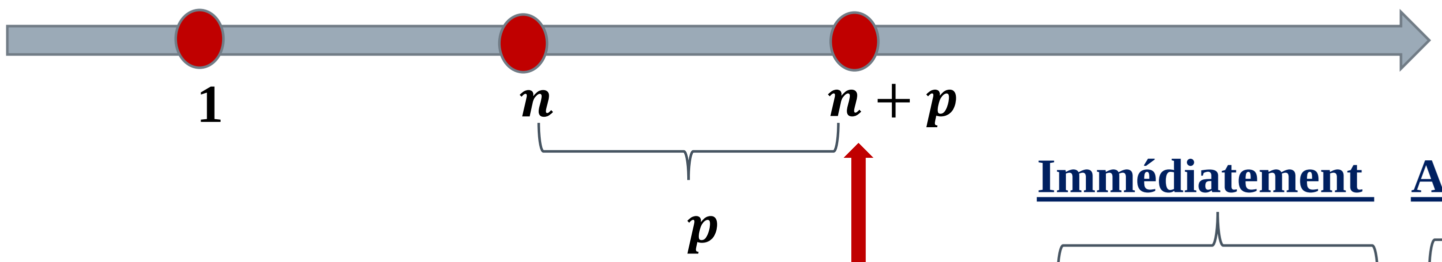
$$V_{n+3} = V_n \times (1+i)^{n'}$$

$$V_{n+3} = 5637{,}09 \times (1{,}06)^3 = 6713{,}87$$

1. la valeur Acquise

Définition 1.3

- La valeur acquise de n annuités de p périodes après le dernier versement.



$$\mathbf{V_{n+p}} = a \times \overbrace{\frac{(1+i)^n-1}{i}}^{\text{Immédiatement}} \times \overbrace{(1+i)^p}^{\text{Après le dernier versement}}$$

Avec :

- V_n : la valeur acquise par la suite des annuités
- a : l'annuité constante de fin de période
- n : le nombre de périodes (d'annuités)
- p : le nombre de périodes après de le dernier versement
- i : le taux d'intérêt

Exercice

Pour améliorer sa pension de retraite, en versant chaque année 5 000 Dh pendant 15 ans, Monsieur Ahmed veut constituer un capital avec un taux de 6,5%.

- De quelle somme disposera t-il au moment du dernier versement ?
- De quelle somme disposera t-il après 2 ans du dernier versement

Solution

- 1. On applique la relation :

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_{15} = 5000 \times \frac{(1+0{,}065)^{15} - 1}{0{,}065} = 120\,910{,}84$$

- 2. On applique la relation :

$$V_{n+p} = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)^p$$

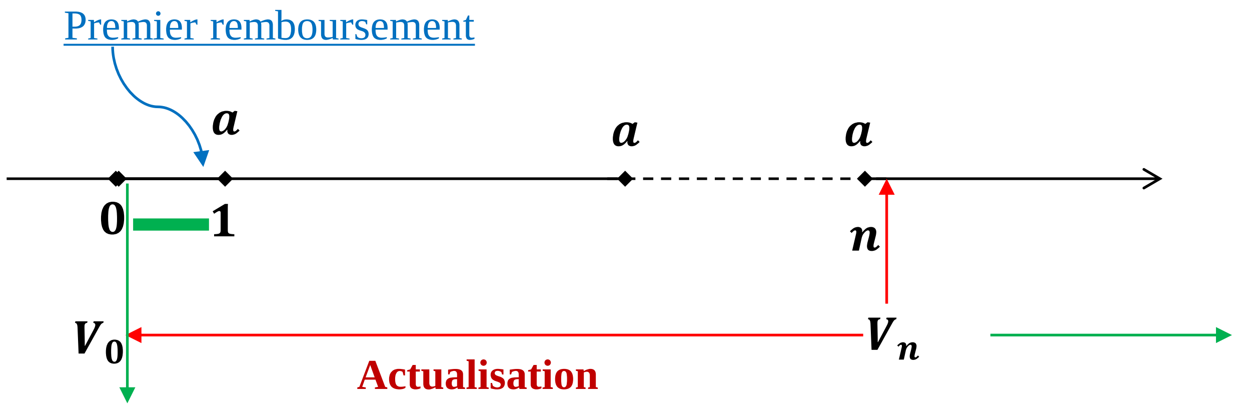
$$V_{15+2} = V_{17} = 5000 \times \frac{(1+0{,}065)^{15} - 1}{0{,}065} \times (1+0{,}065)^2 = 137140{,}105$$

2. la valeur Actuelle

Définition 1.4

La valeur actuelle est la valeur à la date d'aujourd'hui. La valeur actuelle d'une série d'annuités est **la somme des valeurs actuelles de toutes les annuités constituant cette série.**

Formalisation



$$\mathrm{V_n} = a \times \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

$$\mathrm{V_0} = V_n \times (1+i)^{-n}$$

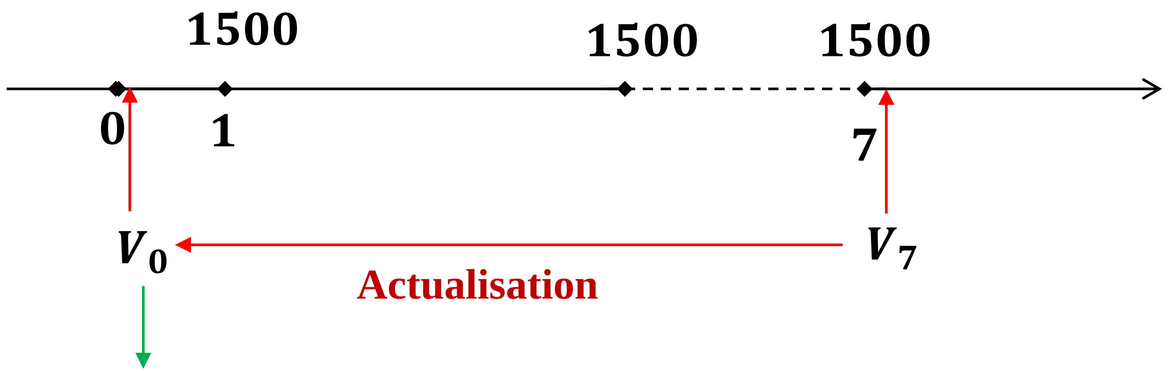
$$\mathrm{V_0} = a \times \frac{(1+i)^{n}-1}{i} \times (1+i)^{-n}$$

$$\mathrm{V_0} = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

2. la valeur Actuelle

Exemple

Quelle est la *valeur actuelle* d'une suite d'annuités *constantes* de 1500 dh versées à la fin de chaque année pendant 8 ans. Le taux est 10%.



$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_0 = 1500 \times \frac{1-(1+0,1)^{-8}}{0,1}$$

$$V_0 = 8002,39\ DH$$

2. la valeur Actuelle

Exemple

Calculer la valeur à l’origine d’une suite de 12 annuités de 32.500 DH. Taux d’intérêt : 8,5% l’an.

$$\mathbf{V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

$$\mathbf{V_0 = 32.500 \times \frac{1-(1+0{,}085)^{-12}}{0{,}085} = 238.702{,}30\ DH}$$

2. la valeur Actuelle

Exemple

Combien faut-il payer à la fin de chaque année de l'emprunt pour rembourser une dette de 350.000 DH, par le versement de 14 annuités constantes ?
Taux d'intérêt : 10,5% l'an.

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a = V_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 350.000 \times \frac{0,105}{1-(1+0,105)^{-14}} = 48.813,31\ DH$$

2. la valeur Actuelle

Exemple

Une dette de 300 000 DH est remboursable en 20 trimestrialités constantes, le premier versement dans 3 mois. Taux 9% l'an.

Calculer la trimestrialité de remboursement.

Taux proportionnel : $i_t = \frac{i}{4} = 0,0225$

$$a = V_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 300\,000 \times \frac{0,0225}{1-(1+0,0225)^{-20}} = 18\,792,62\ DH$$

Taux équivalent : $1 + i_{trimestriel} = (1 + i_{annuel})^{\frac{1}{4}}$**, donc t= 0,02177**

$$a = V_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 300\,000 \times \frac{0,02177}{1-(1+0,02177)^{-20}} = 18663,53\ DH$$

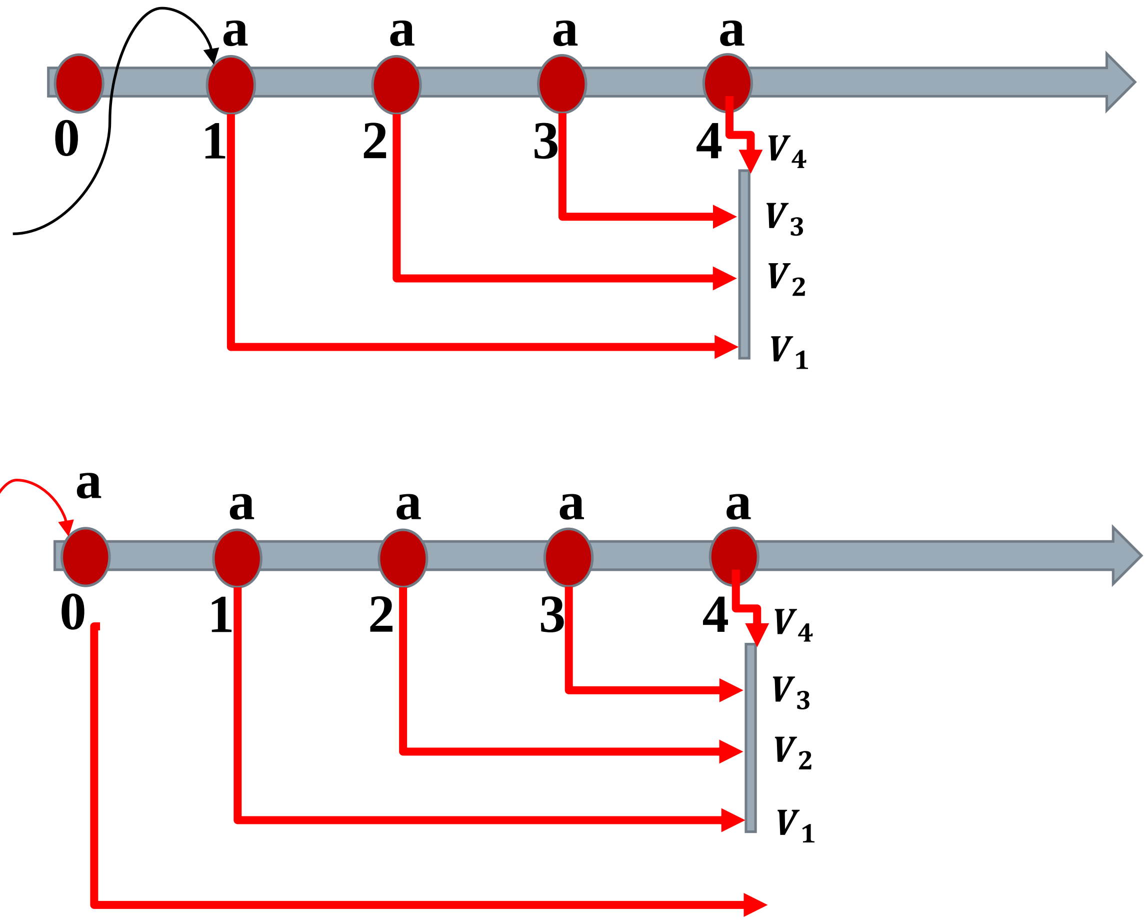
- Section 1: Annuités constantes de fin de période
- Section 2: **Annuités constantes de début de période**

Section 2: Les annuités constantes de début de période

Définition 1.1

Dans de la cas des **annuités de début de période,** les versements ont lieu au début de chaque période.

Le remboursement de la première Annuité s'effectue en fin de la première période

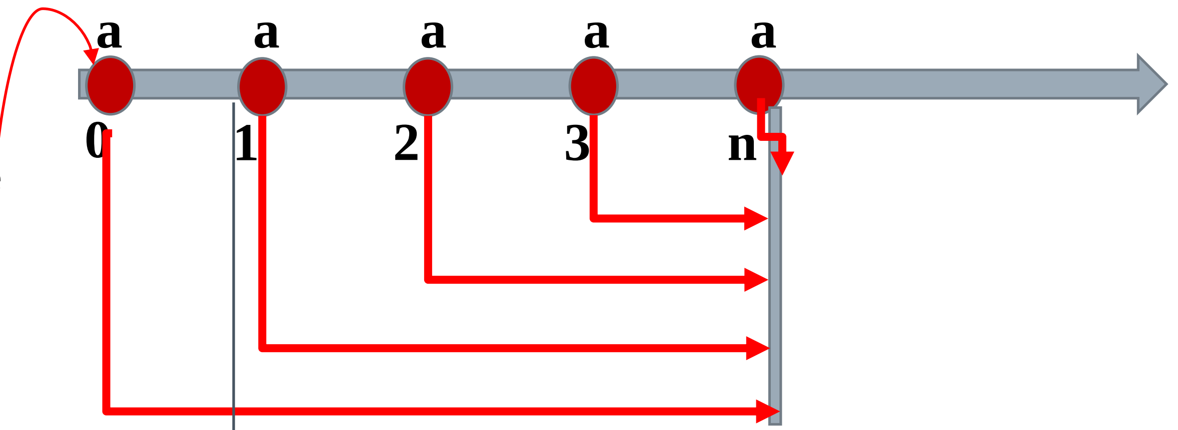


Le remboursement de la première Annuité s'effectue en début de la première période

Section 2: Les annuités constantes de début de période

1. la valeur Acquise

Formalisation



Le remboursement de la première Annuité s'effectue en début de la première période

Capitalisation

$$V_n = V_a \times (1+i)^n$$

$$V_1 = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

La formule des annuités constantes en fin de la première période

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i) \quad \textit{Avec } n = 1$$

Valeur Acquise des annuités constantes de début de période

$$V_n = a(1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

1. la valeur Acquise

Exemple

Calculer le capital constitué un an après le dernier versement, par une suite de 12 annuités de 27.500 DH chacune. Taux : 9% l’an.

$$V_{12} = 27.500 \times \frac{(1+0,09)^{12}-1}{0,09} \times (1 + 0,09) = 603.718,08 \text{ DH}$$

1. la valeur Acquise

Exemple

Quelle doit être la valeur de 6 placements égaux effectués, au début de chaque trimestre pour avoir une valeur acquise de 18.790,98 DH, si le taux annuel est de 5%?

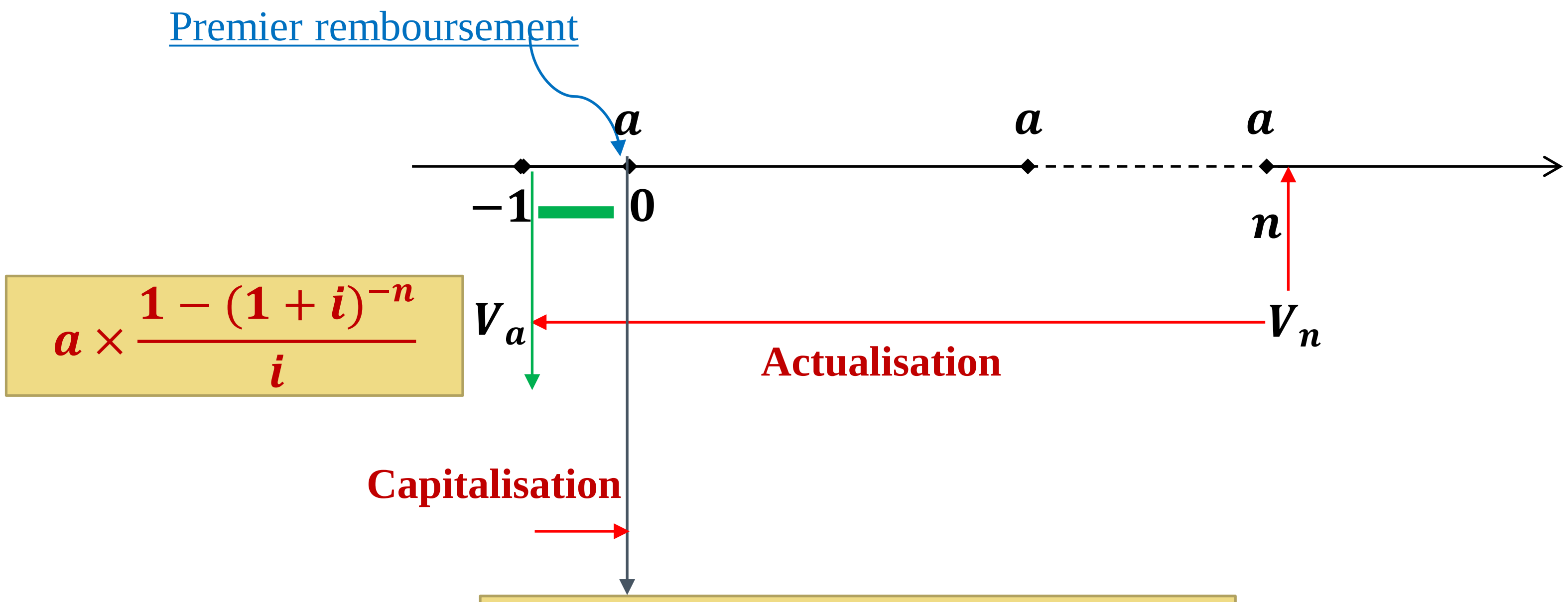
On commence d'abord par **le calcule du taux d'intérêt de la période considérée (trimestre).**

$$1 + i_{trimestriel} = (1 + i_{annuel})^{\frac{1}{4}}$$
$$i_{trimestriel} = 1{,}22\%$$

$$a = \frac{V_n \times i}{(1+i) \times (1+i)^n - 1} = \frac{18790,98 \times 0,0122}{(1+0,0122) \times ((1+0,0122)^6 - 1)} = 3000\ DH$$

Section 2: Les annuités constantes de début de période

2. la valeur Actuelle



$$V_0 = \left[a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \times (1+i)$$

$$V_0 = a(1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

2. la valeur Actuelle

Exemple:

Calculer la valeur actuelle, au moment du versement du premier terme, par une suite de 15 annuités de 31.000 DH chacune. Taux d'intérêt : 12,5% l'an.

$$V_0 = a(1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_0 = 31000\ (1+0,125) \times \frac{1-(1+0,125)^{-15}}{0,125} = 231.322,18\ DH$$

2. la valeur Actuelle

Exemple

Un emprunt est contracté au taux de 6% est remboursé à l'aide de 5 annuités annuelles constantes de 1000 dh chacune. Calculer la valeur actuelle de l'emprunt dans les cas suivants :

- La première annuité est versée immédiatement (annuité de début de période) ?
- La première annuité est versée dans 6 mois?

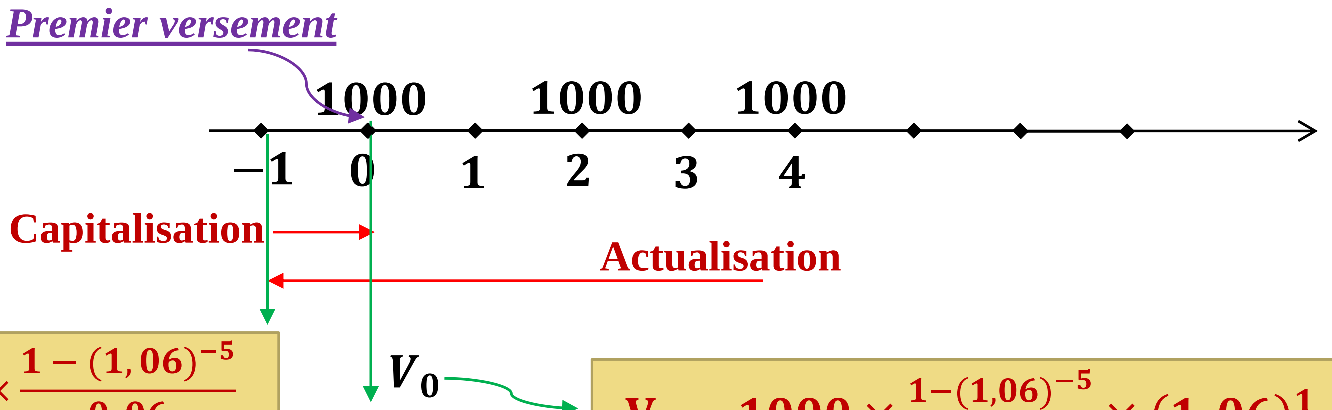
Section 2: Les annuités constantes de début de période

2. la valeur Actuelle

Exemple

Un emprunt est contracté au taux de 6% est remboursé à l'aide de 5 annuités annuelles constantes de 1000 dh chacune. Calculer la valeur actuelle de l'emprunt dans les cas suivants :

- **La première annuité est versée immédiatement** (annuité de début de période) ?
- La première annuité est versée dans 6 mois?



$$1000 \times \frac{1-(1,06)^{-5}}{0,06}$$

$$V_0 = 1000 \times \frac{1-(1,06)^{-5}}{0,06} \times (1,06)^1$$

Je cherche le montant de l'emprunt ***Aujourd'hui***

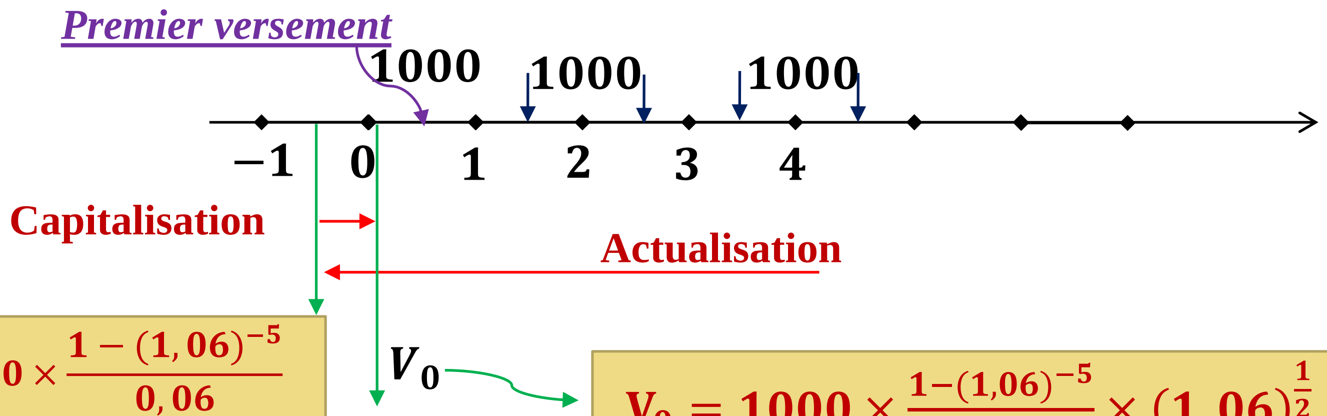
$$V_0 = 4465,10\ DH$$

2. la valeur Actuelle

Exemple

Un emprunt est contracté au taux de 6% est remboursé à l'aide de 5 annuités annuelles constantes de 1000 dh chacune. Calculer la valeur actuelle de l'emprunt dans les cas suivants :

- La première annuité est versée immédiatement (anuité de début de période) ?
- **La première annuité est versée dans 6 mois**?



$$1000 \times \frac{1-(1,06)^{-5}}{0,06}$$

$$V_0 = 1000 \times \frac{1-(1,06)^{-5}}{0,06} \times (1,06)^{\frac{1}{2}}$$

Je cherche le montant de l'emprunt *Aujourd'hui*

$$V_0 = 4336,89$$